УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 150, кн. 3 Физико-математические науки *2008*

УДК 530.12

ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Литвинов, В.А. Попов

Аннотация

Рассматривается пространство-время, геометрия которого определяется тензором энергии-импульса сверхтекучей жидкости. Исследованы группы движений при условии, что движение сверхтекучей и нормальной компонент жидкости направлены вдоль различных векторных полей Киллинга. Показано, что операторы, порождаемые векторами Киллинга, отвечающими нормальному и сверхтекучему движению, образуют центр алгебры Ли. Выделены и исследованы все возможные группы движения, удовлетворяющие данному условию. Показано, что существует единственное поле тяготения, допускающее группу изометрий с порядком $r \geq 4$.

Ключевые слова: релятивистская динамика сверхтекучей жидкости, группы движений, точные решения уравнений Эйнштейна.

Введение

Равновесие релятивистских систем сопряжено с определенными требованиями к симметрии пространства-времени [1, 2]. Для системы безмассовых частиц таким условием является наличие конформной симметрии, а для массивных – существование временеподобного вектора Киллинга, вдоль которого направлено макроскопическое движение системы. В этой связи группа изометрий исследовалась применительно ко многим физическим системам, в том числе для уравнений Эйнштейна – Максвелла [3, 4], идеального газа [5] и заряженной идеальной жидкости [6]. Для сверхтекучей жидкости рассматриваемое ниже изометрическое движение является наиболее простым видом симметрии, при котором может реализоваться равновесное состояние [7].

В релятивистской физике явление сверхтекучести связано прежде всего с нейтронными звездами, для которых установлено существование сверхтекучей фазы. С другой стороны, нейтронные звезды обладают сильным гравитационным полем и должны рассматриваться в рамках общей теории относительности. Помимо этого, предполагается, что сверхтекучими свойствами может обладать скалярное поле, которое играет роль темной энергии и темной материи в ряде космологических моделей [8, 9].

Классическая двухжидкостная гидродинамика Ландау описывает движение сверхтекучей жидкости в терминах двух векторных полей, соответствующих скорости жидкости, находящейся в основном квантовом состоянии (сверхтекучая компонента), и скорости газа возбуждений (нормальная компонента). В работах [10, 11] было построено ковариантное обобщение данной модели, согласно которому тензор энергии-импульса сверхтекучей жидкости может быть записан в виде

$$T^i_j = n^i \mu_j + s^i \theta_j - p\delta^i_j,$$

где p – давление, n^i и s^i – потоки числа частиц и энтропии, μ_j и θ_j – динамически сопряженные им импульсы, так что вариация давления есть

$$\delta p = s^i \delta\theta_i + n^i \delta\mu_i. \tag{1}$$

С другой стороны, в силу инвариантности давления его зависимость от μ_j и θ_j выражается в виде функции $p = p(\mu^2, \theta^2, x^2)$ от скалярных величин $\mu^2 = \mu_i\mu^i$, $\theta^2 = = \theta_i\theta^i$, $x^2 = \mu_i\theta^i$. Тогда

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \mu^2}\delta\mu^2 + \frac{\partial p}{\partial \theta^2}\delta\theta^2 + \frac{\partial p}{\partial x^2}\delta x^2. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), находим, что потоки числа частиц и энтропии являются линейными комбинациями импульсов μ_j и θ_j:

$$n^i = \mathcal{B}\mu^i + \mathcal{A}\theta^i, \quad s^i = \mathcal{A}\mu^i + \mathcal{C}\theta^i.$$

Движение газа возбуждений происходит вдоль вектора s^i, а сверхтекучее движение – вдоль вектора μ_j, который интерпретируется как градиент фазы волновой функции основного состояния, так что

$$\nabla_{[k}\mu_{i]} = 0. \tag{3}$$

Здесь ∇_k означает ковариантную производную, а величина μ, определенная выше, является химическим потенциалом жидкости. Выбрав в качестве независимых потоков s^i и μ_j, можно переписать тензор энергии-импульса в терминах нормальной и сверхтекучей компонент [12]:

$$T_{ij} = w_{\mathrm{n}} U_i U_j + w_{\mathrm{s}} V_i V_j - p g_{ij}, \tag{4}$$

где U_i и V_i – нормированные векторы скоростей нормального и сверхтекучего движения, которые связаны с соответствующими потоками с помощью соотношений

$$U^i = \frac{s^i}{\sqrt{s^i s_i}}, \quad V^i = \frac{\mu^i}{\mu}.$$

1. Структура алгебры Ли, определяемая видом тензора энергии-импульса

В данной работе исследуется пространство-время V_4 с сигнатурой $(+---)$, геометрия которого определяется уравнениями Эйнштейна

$$G_{ij} = \kappa T_{ij}, \tag{5}$$

где тензор энергии-импульса имеет вид (4), причем $w_{\mathrm{n}}, w_{\mathrm{s}} > 0$. Пусть это пространство допускает группу изометрических движений G_r с r линейно независимыми векторами Киллинга $\mathbf{X}_\alpha = \xi^i_\alpha \partial_i$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ $(2 \le r \le 10)$[1]. Коммутаторы

$$[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{X}_\gamma \tag{6}$$

задают структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}_r$ группы G_r.

Вследствие того, что производная Ли вдоль векторов Киллинга от тензора Эйнштейна G_{ij} равна нулю, справедливо соотношение

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} T_{ij} = 0. \tag{7}$$

[1]Компоненты тензоров маркируются латинскими индексами, а элементы группы – греческими. Для обоих типов индексов используется правило суммирования Эйнштейна.

Выполняя различные свертки (7) с метрическим тензором, векторами U^i и V^i, а также с единичным пространственноподобным вектором, ортогональным к векторам U^i и V^i, получим следующие соотношения

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, p = 0, \tag{8}$$

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, (w_{\rm s} + w_{\rm n}) = 0, \tag{9}$$

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, \{(\gamma^2 - 1) w_{\rm s} w_{\rm n}\} = 0, \tag{10}$$

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, U_i = \frac{1}{2\gamma w_{\rm n}} (\gamma U_i - V_i) \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, w_{\rm n}, \tag{11}$$

$$\underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, V_i = \frac{1}{2\gamma w_{\rm s}} (\gamma V_i - U_i) \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}}\, w_{\rm s}, \tag{12}$$

где $\gamma = U^i V_i$ характеризует относительную скорость движения нормальной и сверхтекучей компонент, причем $\gamma \neq 1$. Кроме того, для величин $w_{\rm n}$ и $w_{\rm s}$ справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. *Если для какого-либо вектора Киллинга* $\boldsymbol{X}$ *выполнены соотношения* $\underset{\boldsymbol{X}}{\mathcal{L}}\, w_{\rm s} = \alpha w_{\rm s}$ *и* $\underset{\boldsymbol{X}}{\mathcal{L}}\, w_{\rm n} = \beta w_{\rm n}$, *где* $\alpha, \beta = \mathrm{const}$, *то* $\underset{\boldsymbol{X}}{\mathcal{L}}\, w_{\rm s} = \underset{\boldsymbol{X}}{\mathcal{L}}\, w_{\rm n} = 0$.

Доказательство. В силу (9) имеем $\alpha w_{\rm s} + \beta w_{\rm n} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{w_{\rm s}}{w_{\rm n}} = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda,$$

где λ – положительная константа. Тогда (9) перепишем в виде $(1+\lambda) \underset{\mathbf{X}}{\mathcal{L}}\, w_{\rm n} = 0$, откуда следует равенство нулю производных Ли. □

Предположим теперь, что векторы скоростей нормальной U_i и сверхтекучей V_i компонент направлены вдоль *различных* временеподобных векторов Киллинга группы движений G_r:

$$V^i = \frac{\zeta^i}{\zeta}, \quad \zeta = \sqrt{\zeta^i \zeta_i}, \quad U^i = \frac{\eta^i}{\eta}, \quad \eta = \sqrt{\eta^i \eta_i},$$

где векторы $\mathbf{Y}_{\rm s} = \zeta^i \partial_i$ и $\mathbf{Y}_{\rm n} = \eta^i \partial_i$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{X}_\alpha$:

$$\mathbf{Y}_{\rm s} = a^\alpha \mathbf{X}_\alpha, \quad \mathbf{Y}_{\rm n} = b^\alpha \mathbf{X}_\alpha.$$

Используя уравнения Киллинга

$$\nabla_j \xi_{\alpha i} + \nabla_i \xi_{\alpha j} = 0$$

и структурные уравнения (6), из которых следует, что

$$\xi^i_\alpha \nabla_i \xi^j_\beta - \xi^i_\beta \nabla_i \xi^j_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta} \xi^j_\gamma,$$

приведем равенства (11) и (12) к виду:

$$\begin{aligned} a^\beta c^\gamma_{\alpha\beta} \xi_{\gamma i} &= (A_\alpha a^\gamma + B_\alpha b^\gamma) \xi_{\gamma i}, \\ b^\beta c^\gamma_{\alpha\beta} \xi_{\gamma i} &= (C_\alpha a^\gamma + D_\alpha b^\gamma) \xi_{\gamma i}, \end{aligned} \tag{13}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_\alpha = a^\beta c^\sigma_{\alpha\beta}\frac{V_i\xi^i_\sigma}{\zeta} - \frac{1}{2w_\mathrm{s}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_\mathrm{s}, \quad B_\alpha = \frac{\zeta}{2\gamma\eta w_\mathrm{s}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_\mathrm{s},$$
$$D_\alpha = b^\beta c^\sigma_{\alpha\beta}\frac{U_i\xi^i_\sigma}{\eta} - \frac{1}{2w_\mathrm{n}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_\mathrm{n}, \quad C_\alpha = \frac{\eta}{2\gamma\zeta w_\mathrm{n}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_\mathrm{n}. \tag{14}$$

Докажем следующее утверждение:

Предложение 2. *Величины* $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$*, входящие в выражения* (13) *являются константами.*

Доказательство. Выражение (13) ковариантно продифференцируем по x^j и симметризуем по индексам j и k. В силу уравнений Киллинга получим

$$\nabla_{(j}A_\alpha\zeta_{k)} + \nabla_{(j}B_\alpha\eta_{k)} = 0. \tag{15}$$

Выполним все возможные попарные свертки выражения (15) с векторами ζ^j и η^j, а также с метрическим тензором g^{jk}. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\zeta^i\nabla_iA_\alpha + \eta^i\nabla_iB_\alpha = 0,\\
&\zeta\zeta^i\nabla_iA_\alpha + \eta\gamma\zeta^i\nabla_iB_\alpha = 0,\\
&\zeta\eta\gamma\zeta^i\nabla_iA_\alpha + \zeta^2\eta^i\nabla_iA_\alpha + \eta^2\zeta^i\nabla_iB_\alpha + \zeta\eta\gamma\eta^i\nabla_iB_\alpha = 0,\\
&\eta\gamma\eta^i\nabla_iA_\alpha + \eta\eta^i\nabla_iB_\alpha = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

относительно скалярных величин $\zeta^i\nabla_iA_\alpha$, $\eta^i\nabla_iA_\alpha$ и т. д. Определитель системы (16) не равен нулю, следовательно, она имеет только тривиальные решения

$$\zeta^i\nabla_iA_\alpha = \eta^i\nabla_iA_\alpha = \zeta^i\nabla_iB_\alpha = \eta^i\nabla_iB_\alpha = 0. \tag{17}$$

Выполним теперь однократные свертки выражения (15) с ζ^i и η^i. С учетом соотношения (17) получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&\zeta\nabla_kA_\alpha + \eta\gamma\nabla_kB_\alpha = 0,\\
&\zeta\gamma\nabla_kA_\alpha + \eta\nabla_kB_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Разрешая их относительно производных ∇_kA_α и ∇_kB_α также получим только тривиальное решение $\nabla_kA_\alpha = \nabla_kB_\alpha = 0$ или $A_\alpha, B_\alpha = \mathrm{const}$. Аналогично доказывается, что $C_\alpha, D_\alpha = \mathrm{const}$. □

В силу предложения 2 и линейной независимости векторов ξ^i_γ из (13) следует, что

$$\begin{aligned}
&a^\beta c^\gamma_{\alpha\beta} = A_\alpha a^\gamma + B_\alpha b^\gamma,\\
&b^\beta c^\gamma_{\alpha\beta} = C_\alpha a^\gamma + D_\alpha b^\gamma.
\end{aligned} \tag{19}$$

Сворачивая уравнения структуры алгебры (6) последовательно с a^α и b^α и учитывая (19), получим

$$[\mathbf{X}_\sigma, \mathbf{Y}_\mathrm{n}] = A_\sigma\mathbf{Y}_\mathrm{s} + B_\sigma\mathbf{Y}_\mathrm{n},$$
$$[\mathbf{X}_\sigma, \mathbf{Y}_\mathrm{s}] = C_\sigma\mathbf{Y}_\mathrm{s} + D_\sigma\mathbf{Y}_\mathrm{n}.$$

Следовательно, операторы $\mathbf{Y}_\mathrm{s}$ и $\mathbf{Y}_\mathrm{n}$ образуют идеал алгебры $\mathfrak{g}_r$.

2. Следствия из уравнений движения

Еще одним следствием уравнений Эйнштейна (5) является ковариантный закон сохранения энергии и импульса

$$\nabla_i T^{ij} = 0, \tag{20}$$

который вместе с законом сохранения числа частиц $\nabla_i n^i = 0$ и условием потенциальности движения сверхтекучей компоненты (3) составляет полную систему уравнений движения сверхтекучей жидкости. Свертки уравнения (3) с V^i и проектором $\Delta^i_j = \delta^i_j - V^i V_j$ дают уравнение для ускорения сверхтекучей компоненты

$$\mu V^i \nabla_i V_j = \Delta^i_j \nabla_i \mu \tag{21}$$

и уравнение безвихревого движения в традиционной форме [13]

$$\Delta^i_j \nabla_i V_k - \Delta^i_k \nabla_i V_j = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим условия, которые накладывают уравнения движения на структуру группы движения G_r. Заметим, что поскольку $\underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} V^i = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} U^i = 0$, то с учетом соотношений (9)–(12) скаляры $w_\mathrm{s}, w_\mathrm{n}, \gamma$ не меняются вдоль векторных полей $\mathbf{Y}_\mathrm{s}$ и $\mathbf{Y}_\mathrm{n}$:

$$\underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} w_\mathrm{s} = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} w_\mathrm{s} = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} w_\mathrm{n} = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} w_\mathrm{n} = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} \gamma = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} \gamma = 0. \tag{23}$$

Следовательно, в силу (11) и (12)

$$\underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} V^i = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} U^i = 0. \tag{24}$$

Представив производные Ли (24) через ковариантные производные, легко найти, что должно выполняться следующее соотношение:

$$V^i \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} \zeta = -U^i \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} \eta.$$

В силу того, что вектора V^i и U^i неколлинеарны, то $\underset{\mathbf{Y}_\mathrm{n}}{\mathcal{L}} \zeta = \underset{\mathbf{Y}_\mathrm{s}}{\mathcal{L}} \eta = 0$, что ведет к равенству

$$V^k \nabla_k U^i = U^k \nabla_k V^i. \tag{25}$$

После несложных рутинных алгебраических преобразований, в которых используются соотношения (23) и (25), закон сохранения (20) может быть приведен к виду

$$w_\mathrm{s} V^i \nabla_i V^j + w_\mathrm{n} U^i \nabla_i U^j - \nabla^j p = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь уравнение движения сверхтекучей компоненты (21). Свернув его с вектором ξ^k_α, получим

$$\mu \xi^k_\alpha V^i \nabla_i V_k = \left(\delta^\beta_\alpha - \frac{V_i \xi^i_\alpha}{\xi} a^\beta \right) \underset{\mathbf{X}_\beta}{\mathcal{L}} \mu.$$

В силу соотношения (2), уравнение (8) будет удовлетворяться тогда и только тогда, когда будут равны нулю производные Ли от всех независимых переменных в (2). Следовательно,

$$\xi^k_\alpha V^i \nabla_i V_k = 0. \tag{27}$$

Свертка (26) с вектором Киллинга ξ^i_σ, с учетом условий (8) и (27) дает

$$\xi^j_\sigma U^i \nabla_i U_j = 0. \tag{28}$$

Правые части выражений (27) и (28) могут быть представлены в виде производных Ли:

$$\begin{aligned} \xi^j_\alpha V^i \nabla_i V_j &= -\frac{1}{\zeta} \underset{\mathbf{X}_\sigma}{\mathcal{L}} \zeta = -a^\alpha c^\gamma_{\sigma\alpha} \frac{\xi^i_\gamma V_i}{\zeta} = 0, \\ \xi^j_\sigma U^i \nabla_i U_j &= -\frac{1}{\eta} \underset{\mathbf{X}_\sigma}{\mathcal{L}} \eta = -b^\alpha c^\gamma_{\sigma\alpha} \frac{\xi^i_\gamma U_i}{\eta} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

С учетом выражений (29) две из четырех констант, определяемых выражениями (14), будут равны

$$A_\alpha = -\frac{1}{2w_{\mathrm{s}}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_{\mathrm{s}}, \quad D_\alpha = -\frac{1}{2w_{\mathrm{n}}} \underset{\mathbf{X}_\alpha}{\mathcal{L}} w_{\mathrm{n}}.$$

В силу предложения 1 отсюда вытекает, что все константы

$$A_\alpha = B_\alpha = C_\alpha = D_\alpha = 0.$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если пространство-время V_4 со сверхтекучей жидкостью допускает группу движений G_r и макроскопическое движение нормальной и сверхтекучей компонент происходит вдоль различных временеподобных векторов Киллинга, то эти векторы лежат в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}_r$ группы G_r.*

3. Отбор групп движения

Используя классификацию Петрова [14] полей тяготения по группам движений, с учетом теоремы 1 можно исследовать все возможные группы движений G_r.

Для групп с $r \geq 4$ соответствующие метрики выражаются явно через элементарные функции [14], поэтому можно провести полное исследование этих групп с использованием уравнений Эйнштейна.

Среди групп размерности 4 требованиям теоремы 1 удовлетворяют просто-транзитивные группы $G_4\mathrm{VI}_1$ и $G_4\mathrm{VI}_3$.

Алгебра Ли группы $G_4\mathrm{VI}_3$ имеет единственную отличную от нуля структурную константу $c^2_{14} = 1$. Центр алгебры образуют элементы $\mathbf{X}_2$ и $\mathbf{X}_3$. Метрические коэффициенты пространства-времени, допускающего эту группу движения, равны

$$\begin{gathered} g_{11} = K_{11}, \quad g_{12} = K_{12} - K_{13}x^4, \quad g_{13} = K_{13}, \quad g_{22} = K_{22} - K_{23}x^4 + K_{33}(x^4)^2, \\ g_{23} = K_{23} - K_{33}x^4, \quad g_{33} = K_{33}, \quad g_{44} = K_{44}, \quad g_{i4} = 0. \end{gathered}$$

Прямым вычислением легко показать, что ни при каких значениях a^α условие (22) не может быть удовлетворено. Следовательно, данная группа исключается из числа допустимых.

Алгебра Ли группы $G_4\mathrm{VI}_1$ имеет единственную отличную от нуля структурную константу $c^2_{24} = 1$. Центр алгебры образуют векторы $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$. Метрические коэффициенты пространства-времени, допускающего эту группу движения, равны

$$\begin{gathered} g_{11} = K_{11}, \quad g_{12} = K_{12}, \quad g_{13} = K_{13}e^{-x^4}, \quad g_{22} = K_{22}, \\ g_{23} = K_{23}e^{-x^4}, \quad g_{33} = K_{33}e^{-2x^4}, \quad g_{44} = K_{44}, \quad g_{i4} = 0. \end{gathered}$$

Такая метрика генерируется тензором энергии-импульса вида (4) с постоянными w_{s}, w_{n} и p, но при этом $p < 0$. Действительно, из временеподобности вектора ζ^i и условия (22) следует, что a^α могут быть выбраны в виде $a^1 = K_{23}$, $a^2 = -K_{13}$. Тогда давление можно записать в виде $p = \zeta^2 \exp(-2x^4)/4\kappa g$. Эта величина отрицательна, поскольку $g = \det(g_{ij}) < 0$.

Величины w_s и w_n могут быть выражены через давление посредством соотношений:

$$w_\mathrm{s} = 2p + \frac{1}{K_{44}}, \quad w_\mathrm{n} = 4p + \frac{1}{K_{44}}.$$

Положительность этих величин обеспечивается только при условии $0 < -4p < 1/K_{44}$.

Среди групп размерности $r \geq 5$ нет групп, допускающих изометрическое движение сверхтекучей жидкости. Этот вывод следует из того факта, что для всех групп движения с алгеброй $\mathfrak{g}_r$, центр которой содержит не менее двух элементов, структура тензора энергии-импульса не совпадает со структурой тензора Эйнштейна. Проиллюстрируем это на примере группы G_5, алгебра Ли которой имеет следующие элементы:

$$\mathbf{X}_1 = \partial_1 - x^2\partial_2, \quad \mathbf{X}_2 = \partial_2, \quad \mathbf{X}_3 = \partial_3,$$

$$\mathbf{X}_4 = \partial_4, \quad \mathbf{X}_5 = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2 + \frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2}{2}\partial_3,$$

а соответствующая метрика имеет вид:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \varepsilon\left[\left(\mathrm{d}x^3 + x^1\,\mathrm{d}x^2\right)^2 - \mathrm{d}\left(x^4\right)^2\right], \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (30)$$

Центр этой алгебры состоит из векторов $\mathbf{X}_3$ и $\mathbf{X}_4$, следовательно, помимо диагональных компонент тензора энергии-импульса, ненулевой является только компонента T^{34}, тогда как соответствующая компонента тензора Эйнштейна, вычисленная по метрике (30), $G^{34} \equiv 0$, а компонента $G^{23} \neq 0$.

Остальные группы G_r с $r \geq 5$, удовлетворяющие условию теоремы 1, исследуются аналогично.

Среди групп G_2 и G_3 возможны только абелевы группы. Явный вид метрик, соответствующий этим группам, может быть найден только путем решения уравнений Эйнштейна.

Заключение

В данной работе исследованы группы движения в пространстве-времени, где источником гравитационного поля выступает сверхтекучая жидкость, которая описывается в рамках стандартного двухжидкостного формализма. Предполагается, что скорости сверхтекучей и нормальной компонент жидкости направлены вдоль векторов Киллинга, генерирующих алгебру Ли $\mathfrak{g}_r$ группы изометрий.

Оказалось, что в рамках этих требований группы изометрий G_r с $r \geq 5$ не допускаются структурой тензора энергии-импульса.

Существует единственное решение уравнений Эйнштейна, для которого пространство-время допускает просто-транзитивную группу движения четвертого порядка. В данном решении давление жидкости постоянно и отрицательно, что позволяет рассматривать его как результат решения уравнений Эйнштейна с космологической постоянной. Решения такого вида сейчас активно обсуждаются в литературе в связи с проблемой темной энергии [15, 16].

Для групп второго и третьего порядка метрика пространства-времени может быть предъявлена только в результате непосредственного решения уравнений Эйнштейна. Эту задачу предполагается выполнить в дальнейшем.

Авторы выражают признательность Р.А. Даишеву и Е.В. Патрину за полезное обсуждение и ценные советы.

Summary

A.A. Litvinov, V.A. Popov. Isometry Group of Superfluids.

A space-time with geometry determined by superfluid energy-momentum tensor is considered. Groups of isometry are investigated under the assumption that movements of superfluid and normal components are directed along different Killing vector fields. It is shown that operators generated by the Killing vectors associated with the superfluid and normal flow constitute the center of Lie algebra. All possible groups of isometry satisfying this condition are specified and investigated. A unique gravitational field is shown to exist, admitting the isometry group of order $r \geq 4$.

Key words: relativistic superfluid dynamics, groups of motions, exact solutions of Einstein's equations.

Литература

1. *Черников Н.А.* Релятивистский газ в гравитационном поле. – Препринт № 1027. – Дубна: ОИЯИ, 1962. – 32 с.
2. *Черников Н.А.* Равновесное распределение релятивистского газа. – Препринт № 1159. – Дубна: ОИЯИ, 1962. – 28 с.
3. *Ozsvath I.* Homogenous solutions of Einstein-Maxwell equations // J. Math. Phys. – 1965. – V. 6. – P. 1255–1264.
4. *Hiromoto R.E., Ozsvath I.* On homogenous solutions of Einstein's field equations // Gen. Relat. and Gravit. – 1979. – V. 9. – P. 299–306.
5. *Иванов Г.Г., Даишев Р.А.* Макроскопические движения идеального газа и симметрии пространства-времени // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – Вып. 14. – С. 74–79.
6. *Даишев Р.А.* Изометрические движения идеальной заряженной жидкости // Изв. вузов. Физика. – 1987. – № 10. – С. 25–30.
7. *Popov V.* Relativistic Kinetic Theory of Phonon Gas in Superfluids // Gen. Relat. and Gravit. – 2006. – V. 38. – P. 917–935.
8. *Silverman M.P., Mallett R.L.* Coherent degenerate dark matter: a galactic superfluid? // Class. and Quantum Grav. – 2001. – V. 18. – P. L103–L108.
9. *Ferrer F., Grifols J.A.* Bose-Einstein Condensation, Dark Matter and Acoustic Peaks // J. Cosmology and Astroparticle Phys. – 2004. – V. 0412. – P. 012–024.
10. *Лебедев В.В., Халатников И.М.* Релятивистская гидродинамика сверхтекучей жидкости // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 83. – С. 1601–1614.
11. *Carter B., Khalatnikov I.M.* Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics // Phys. Rev. D. – 1992. – V. 45. –P. 4536–4544.
12. *Carter B., Langlois D.* Equation of state for cool relativistic two-constituent superfluid dynamics // Phys. Rev. D. – 1995. – V. 51. –P. 5855-5864.
13. *Синг Дж.* Общая теория относительности. – М.: ИЛ, 1963. – 432 с.
14. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 496 с.

15. *Tajmar M.* A note on the local cosmological constant and the dark energy coincidence problem // Class. and Quantum Grav. – 2006. – V. 23. – P. 5079–5083.

16. *Dutta S., Maor I.* Voids of dark energy // Phys. Rev. D – 2007. – V. 75. – P. 063507.

Поступила в редакцию
15.04.08

Литвинов Александр Алексеевич – студент физического факультета Казанского государственного университета.

E-mail: *batnauka@yandex.ru*

Попов Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.

E-mail: *vladimir.popov@ksu.ru*